UNIVERSITE IBN ZOHR
Faculté des Sciences Juridiques
Economiques et Sociales
Agadir

Année Universitaire 2014-2015

S5

Recherche Opérationnelle
Corrigé de la série 2: Résolution par la méthode algébrique

Pr. O.Chadli

Exercice 1

1- Notons par x_1 et x_2 respectivement les quantités des bureaux du modèle M_1 et M_2 fabriqués par la société. Notons par (I) le programme canonique et par (I') le programme standard. Les programmes (I) et (I') sont donnés par:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \text{Max } [300\ x_1 + 200\ x_2] \\ \text{s.c.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \qquad \text{Programme canonique}$$

$$(\mathrm{I'}) \quad \begin{cases} \text{Max } [300\ x_1 + 200\ x_2 + 0\ x_3 + 0\ x_4 + 0\ x_5] \\ \text{s.c.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 22 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \qquad \text{Programme standard}$$

Les variables x_3, x_4 et x_5 représentent les variables d'écarts. Notons la fonction économique par Z:

$$Z = 300\ x_1 + 200\ x_2.$$

La méthode algébrique consiste à suivre "géométriquement" le cheminement le long des côtés du domaine des solutions admissibles du programme (I), puisque les valeurs des couples (x_1, x_2) correspondant aux différentes solutions du programme canonique (I) sont égales à celles correspondant aux solutions du programme standard (I'). La solution de base (extrême) de départ du programme standard correspond au sommet $(\mathcal{O})$ pour le programme canonique: c'est la "solution nulle" $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$, qui consiste à ne rien produire ($Z = 0$).
La solution de base de départ $(\mathcal{O})$ pour le programme standard est donc :

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 20,\ x_4 = 22,\ x_5 = 12.$$

On a donc,

$$\begin{array}{lcl} \text{Variables hors-base} & : & x_1,\ x_2; \\ \text{Variables dans la base} & : & x_3,\ x_4,\ x_5. \end{array}$$

La valeur de la fonction économique pour la solution de base de départ est : $Z = 0$.
<u>**Première itération :**</u>

Soit (S_0) le système formé par les contraintes et par la fonction économique, désignée par z :

$$(S_0) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 22 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ 300x_1 + 200x_2 - z = 0 \end{cases}$$

a- Sélection de la variable entrante:

La fonction économique, exprimée exclusivement en fonction des variables hors-base de la solution de départ, s'écrit :

$$z = 300\ x_1 + 200\ x_2$$

Le coefficient 300 (resp 200) représente l'accroissement de z lorsqu'on porte de la valeur 0 à la valeur 1 la variable hors-base x_1 (resp. x_2). Le critère de sélection en question conduit à choisir la variable correspondant au plus grand accroissement de z dans ces conditions: ici, la sélection portera donc sur x_1 "qui, par unité, rapporte le plus".
La variable entrante est donc x_1.

b- Sélection de la variable sortante:

Considérons le système $(S_0)'$ équivalent à (S_0) obtenu en exprimant les variables dans la base x_3, x_4, x_5 et la fonction économique z exclusivement en fonction des variables hors-base:

$$(S_0)' \quad \begin{cases} x_3 = 20 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 22 - 2x_1 - x_2 \\ x_5 = 12 - x_1 - x_2 \\ z = 300x_1 + 200x_2 \end{cases}$$

Faisant $x_2 = 0$ dans $(S_0)'$, on obtient (en négligeant la dernière équation) :

$$(T_0) \quad \begin{cases} x_3 = 20 - x_1 \\ x_4 = 22 - 2x_1 \\ x_5 = 12 - x_1 \end{cases}$$

Cherchons maintenant jusqu'à quel niveau il est possible de porter x_1 de façon compatible avec les contraintes. Ces contraintes (autres que celles de signes) sont satisfaites dès l'instant où l'on a :

$$x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

Donc, d'après (T_0), la variable entrante x_1 peut prendre toute valeur positive telle que:

$$(U_0) \quad \begin{cases} 20 - 1 \cdot x_1 \geq 0 \\ 22 - 2 \cdot x_1 \geq 0 \\ 12 - 1 \cdot x_1 \geq 0 \end{cases} \iff (U_0)' \quad \begin{cases} x_1 \leq \frac{20}{1} = 20 \\ \\ x_1 \leq \frac{22}{2} = 11 \\ \\ x_1 \leq \frac{12}{1} = 12 \end{cases}$$

La valeur maximale de x_1 est donc égale à la plus grande solution du système d'inéquations (U_0) : c'est le plus petit rapport figurant dans $(U_0)'$:

$$x_1 = \min\{\frac{20}{1}, \frac{22}{2}, \frac{12}{1}\} = 11$$

On constate alors que, pour une telle valeur de x_1, on a, d'après (T_0) :

$$x_4 = 0.$$

Il en résulte que x_4 devient variable hors-base dans la nouvelle solution extrême $(\mathcal{O}_1)$: x_4 est variable sortante.

La première itération est maintenant terminée. Elle a aboutit à la solution associée au sommet $(\mathcal{O}_1)$:

$$\begin{array}{l} x_2 = 0,\ x_4 = 0 \\ x_1 = 11,\ x_3 = 9,\ x_5 = 1. \end{array}$$

On a donc, une fois la première itération terminée :

$$\begin{array}{lcl} \text{Les nouvelles variables hors-base} & : & x_2,\ x_4, \\ \text{Les nouvelles variables dans la base} & : & x_1,\ x_3,\ x_5. \end{array}$$

Au sommet $(\mathcal{O}_1)$, la fonction économique prend la valeur : $z_1 = 3300$.

Deuxième itération :

Afin de la préparer, il est nécessaire de se placer dans la même situation qu'au début de la première itération : pour la nouvelle solution de base, il nous faut écrire le système $(S_1)'$ exprimant les nouvelles variables dans la base et la fonction économique exclusivement en fonction des nouvelles variables hors-base $x_2,\ x_4$.

$$(S_0)' \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 20 - x_1 - 2x_2 \\ \boxed{x_4 = 22 - 2x_1 - x_2} \longleftarrow \text{équation d'échange} \\ x_5 = 12 - x_1 - x_2 \\ z = 300x_1 + 200x_2 \end{array} \right.$$

$$(S_1)' \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 9 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_1 = 11 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 = 1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ z = 3300 + 50x_2 - 150x_4 \end{array} \right.$$

a- Sélection de la variable entrante:

En fonction des nouvelles variables hors-base, nulles pour la solution de base $(\mathcal{O}_1)$, on a

$$z = 3300 + 50x_2 - 150x_4.$$

Il est visible qu'on n'a pas intérêt à faire entrer x_4 : toute augmentation de x_4 à partir de 0 provoquerait une diminution de z. Le critère de Dantzig conduit à la sélection de x_2, qui sera la variable entrante.

b- Sélection de la variable sortante:

Formons le système (T_1) à partir de $(S_1)'$ en maintenant x_4 à sa valeur 0 :

$$(T_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 9 - \frac{3}{2}x_2 \\ x_1 = 11 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_5 = 1 - \frac{1}{2}x_2 \end{array} \right.$$

et cherchons jusqu'à quel niveau on peut porter x_2. Les contraintes seront satisfaites dès l'instant où :

$$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

La valeur maximale de x_2 est donc la plus grande solution du système d'inéquations:

$$(U_1) \quad \begin{cases} 9 - \frac{3}{2}x_2 \geq 0 \\ \\ 11 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \\ \\ 1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \end{cases} \iff (U_1)' \quad \begin{cases} x_2 \leq \frac{9}{(3/2)} \\ \\ x_2 \leq \frac{11}{(1/2)} \\ \\ x_2 \leq \frac{1}{(1/2)} \end{cases}$$

$$x_2 = \min\{\frac{9}{(3/2)}, \frac{11}{(1/2)}, \frac{1}{(1/2)}\} = 2.$$

Pour cette valeur de x_2, toujours avec $x_4 = 0$, on a $x_5 = 0$ d'après la quatrième équation de (T_1), ainsi x_5 est la variable sortante.

Cette deuxième itération conduit au sommet $(\mathcal{O}_2)$: (obtenu à partir de (T_1) en prenant $x_2 = 2$)

$$\begin{array}{l} x_4 = 0,\ x_5 = 0 \\ x_1 = 10,\ x_2 = 2,\ x_3 = 6 \end{array}$$

On a donc,

les variables hors-base	:	$x_4,\ x_5$;
les variables dans la base	:	$x_1,\ x_2,\ x_3$.

La valeur de la fonction économique pour la solution de base de départ est : $z_2 = 3400$.

Troisième itération :

Exprimons les nouvelles variables dans la base et la fonction économique en fonction des nouvelles variables hors-base $x_4,\ x_5$. Dans $(S_1)'$, l'équation d'échange est la troisième

$$(S_1)' \quad \begin{cases} x_3 = 9 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ \\ x_1 = 11 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ \\ \boxed{x_5 = 1 - \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}x_4} \longleftarrow \text{équation d'échange} \\ \\ z = 3300 + 50x_2 - 150x_4 \end{cases}$$

$$(S_2)' \quad \begin{cases} x_3 = 6 - x_4 + 3x_5 \\ \\ x_1 = 10 - x_4 + x_5 \\ \\ x_2 = 2 + x_4 - 2x_5 \\ \\ z = 3400 - 100x_4 - 100x_5 \end{cases}$$

En fonction des variables hors base, on a :

$$z = 3400 - 100x_4 - 100x_5.$$

Tous les coefficients de z sur ces variables sont négatifs: faire de nouveau entrer dans la base x_4 ou x_5 diminuerait z.
Il n'est donc plus possible "d'améliorer" la fonction économique. La solution extrême précédente est optimale. Les variables "réelles" ont pour valeur optimale:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} x_1^* = 10, & 10 \text{ bureaux du modèle } M_1; \\ x_2^* = 2, & 2 \text{ bureaux du modèle } M_2; \end{array} \right. \\ x_3^* = 6, \\ x_4^* = 0, \\ x_5^* = 0. \end{array}$$

Le programme pour l'entreprise est donc $(x_1^*, x_2^*) = (10, 2)$.

2- On a que $x_3^* = 6$, donc l'attellier de sciage presente un temps libre de 6 heures. D'autre part, puisque $x_4^* = 0$ et $x_5^* = 0$, alors les autres ateliers ne présentent aucun temps libre.

Exercice 2

1- Notons par x_1, x_2 et x_3 respectivement les quantités des produits P_1, P_2 et P_3 fabriqués par la société. Notons par (I) le programme canonique et par (I') le programme standard. Les programmes (I) et (I') sont donnés par:

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } [6\ x_1 + 7\ x_2 + 8x_3] \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 200 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \text{Programme canonique}$$

$$\text{(I')} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } [6\ x_1 + 7\ x_2 + 8x_3 + 0\ x_4 + 0\ x_5 + 0\ x_6] \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 = 120 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_6 = 200 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \text{Programme standard}$$

Les variables x_4, x_5 et x_6 représentent les variables d'écarts. Notons la fonction économique par Z:

$$Z = 6\ x_1 + 7\ x_2 + 8x_3.$$

La solution de base de départ $(\mathcal{O})$ pour le programme standard est:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 100,\ x_5 = 120,\ x_6 = 200.$$

On a donc,

$$\begin{array}{lcl} \text{Variables hors-base} & : & x_1,\ x_2,\ x_3; \\ \text{Variables dans la base} & : & x_4,\ x_5,\ x_6. \end{array}$$

La valeur de la fonction économique pour la solution de base de départ est : $Z = 0$.
Première itération :

Soit (S_0) le système formé par les contraintes et par la fonction économique, désignée par z :

$$(S_0) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 = 120 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_6 = 200 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 - z = 0 \end{cases}$$

a- Sélection de la variable entrante:

La fonction économique, exprimée exclusivement en fonction des variables hors-base de la solution de départ, s'écrit :

$$z = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3$$

Le critère de sélection en question conduit à choisir la variable correspondant au plus grand accroissement de z dans ces conditions: ici, la sélection portera donc sur x_3 "qui, par unité, rapporte le plus".
La variable entrante est donc x_3.

b- Sélection de la variable sortante:

Considérons le système $(S_0)'$ équivalent à (S_0) obtenu en exprimant les variables dans la base x_4, x_5, x_6 et la fonction économique z exclusivement en fonction des variables hors-base:

$$(S_0)' \quad \begin{cases} x_4 = 100 - x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_5 = 120 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ x_6 = 200 - 2x_1 - 6x_2 - 4x_3 \\ z = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 \end{cases}$$

Faisant $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ dans $(S_0)'$, on obtient (en négligeant la dernière équation) :

$$(T_0) \quad \begin{cases} x_4 = 100 - x_3 \\ x_5 = 120 - 2x_3 \\ x_6 = 200 - 4x_3 \end{cases}$$

Cherchons maintenant jusqu'à quel niveau il est possible de porter x_3 de façon compatible avec les contraintes. Ces contraintes (autres que celles de signes) sont satisfaites dès l'instant où l'on a :

$$x_4 \geq 0, \ x_5 \geq 0, \ x_6 \geq 0.$$

Donc, d'après (T_0), la variable entrante x_3 peut prendre toute valeur positive telle que:

$$(U_0) \quad \begin{cases} 100 - 1 \cdot x_3 \geq 0 \\ 120 - 2 \cdot x_3 \geq 0 \\ 200 - 4 \cdot x_3 \geq 0 \end{cases} \iff (U_0)' \quad \begin{cases} x_3 \leq \frac{100}{1} = 100 \\ \\ x_3 \leq \frac{120}{2} = 60 \\ \\ x_3 \leq \frac{200}{4} = 50 \end{cases}$$

La valeur maximale de x_3 est donc égale à la plus grande solution du système d'inéquations (U_0) : c'est le plus petit rapport figurant dans $(U_0)'$:

$$x_3 = \min\{\frac{100}{1}, \frac{120}{2}, \frac{200}{4}\} = 50$$

On constate alors que, pour une telle valeur de x_3, on a, d'après (T_0) :

$$x_6 = 0.$$

Il en résulte que x_6 devient variable hors-base dans la nouvelle solution extrême $(\mathcal{O}_1)$: x_6 est variable sortante.

La première itération est maintenant terminée. Elle a aboutit à la solution associée au sommet $(\mathcal{O}_1)$:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_6 = 0$$
$$x_3 = 50,\ x_4 = 50,\ x_5 = 20.$$

On a donc, une fois la première itération terminée :

Les nouvelles variables hors-base	:	$x_1,\ x_2,\ x_6,$
Les nouvelles variables dans la base	:	$x_3,\ x_4,\ x_5.$

Au sommet $(\mathcal{O}_1)$, la fonction économique prend la valeur : $z_1 = 400$.

Deuxième itération :

Afin de la préparer, il est nécessaire de se placer dans la même situation qu'au début de la première itération : pour la nouvelle solution de base, il nous faut écrire le système $(S_1)'$ exprimant les nouvelles variables dans la base et la fonction économique exclusivement en fonction des nouvelles variables hors-base $x_1,\ x_2,\ x_6$.

$$(S_0)' \quad \begin{cases} x_4 = 100 - x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_5 = 120 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ \boxed{x_6 = 200 - 2x_1 - 6x_2 - 4x_3} \longleftarrow \text{équation d'échange} \\ z = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 \end{cases}$$

$$(S_1)' \quad \begin{cases} x_4 = 50 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_6 \\ x_5 = 20 - 2x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_6 \\ x_3 = 50 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_6 \\ z = 400 + 2x_1 - 5x_2 - \frac{1}{2}x_6 \end{cases}$$

a- Sélection de la variable entrante:

En fonction des nouvelles variables hors-base, nulles pour la solution de base $(\mathcal{O}_1)$, on a

$$z = 400 + 2x_1 - 5x_2 - \frac{1}{2}x_6.$$

Le critère de Dantzig conduit à la sélection de x_1, qui sera la variable entrante.

b- Sélection de la variable sortante:

Formons le système (T_1) à partir de $(S_1)'$ en maintenant x_2 et x_6 à leur valeur 0 :

$$(T_1) \quad \begin{cases} x_4 = 50 - \frac{1}{2}x_1 \\ x_5 = 20 - 2x_1 \\ x_3 = 50 - \frac{1}{2}x_1 \end{cases}$$

et cherchons jusqu'à quel niveau on peut porter x_1. Les contraintes seront satisfaites dès l'instant où :

$$x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

La valeur maximale de x_1 est donc la plus grande solution du système d'inéquations:

$$(U_1)\quad \begin{cases} 50 - \frac{1}{2}x_1 \geq 0 \\ \\ 20 - 2x_1 \geq 0 \\ \\ 50 - \frac{1}{2}x_1 \geq 0 \end{cases} \iff (U_1)' \quad \begin{cases} x_1 \leq \frac{50}{(1/2)} \\ \\ x_1 \leq \frac{20}{2} \\ \\ x_1 \leq \frac{50}{(1/2)} \end{cases}$$

$$x_1 = \min\{\frac{50}{(1/2)}, \frac{20}{2}\} = 10.$$

Pour cette valeur de x_1, toujours avec $x_2 = 0$ et $x_6 = 0$, on a $x_5 = 0$ d'après la deuxième équation de (T_1), ainsi x_5 est la variable sortante.

Cette deuxième itération conduit au sommet $(\mathcal{O}_2)$: (obtenu à partir de (T_1) en prenant $x_1 = 10$)

$$\begin{array}{l} x_4 = 45,\ x_3 = 45 \\ x_1 = 10,\ x_2 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0 \end{array}$$

On a donc,

les variables hors-base	:	$x_2,\ x_5,\ x_6;$
les variables dans la base	:	$x_1,\ x_3,\ x_4.$

La valeur de la fonction économique pour la solution de base de départ est : $z_2 = 420$.

<u>Troisième itération :</u>

Exprimons les nouvelles variables dans la base et la fonction économique en fonction des nouvelles variables hors-base $x_2,\ x_5, x_6$. Dans $(S_1)'$, l'équation d'échange est la deuxième

$$(S_1)' \quad \begin{cases} x_4 = 50 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_6 \\ \\ \boxed{x_5 = 20 - 2x_1 - x_2 + \dfrac{1}{2}x_6} \longleftarrow \text{équation d'échange} \\ \\ x_3 = 50 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_6 \\ \\ z = 400 + 2x_1 - 5x_2 - \frac{1}{2}x_6 \end{cases}$$

$$(S_2)' \quad \begin{cases} x_4 = 45 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{8}x_6 \\ \\ x_1 = 10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{4}x_6 \\ \\ x_3 = 45 - \frac{5}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_5 - \frac{3}{8}x_6 \\ \\ z = 420 - 6x_2 - x_5 \end{cases}$$

En fonction des variables hors base, on a :

$$z = 420 - 6x_2 - x_5.$$

Tous les coefficients de z sur ces variables sont négatifs: faire de nouveau entrer dans la base x_2 ou x_5 diminuerait z.

Il n'est donc plus possible "d'améliorer" la fonction économique. La solution extrême précédente est optimale. Les variables "réelles" ont pour valeur optimale:

$$\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} x_1^* = 10, & 10 \text{ unités du produit } P_1; \\ x_2^* = 0, & 0 \text{ unités du produit } P_2; \\ x_3^* = 45, & 45 \text{ unités du produit } P_3; \end{array}\right. \\ x_4^* = 45, \\ x_5^* = 0, \\ x_6^* = 0. \end{array}$$

Le programme pour l'entreprise est donc $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (10, 0, 45)$.

2- Nous avons que $x_4^* = 45$, donc $x_1^* + 2x_2^* + x_3^* < 100$. Par conséquent, l'atelier d'usinage présente un temps mort.

Pour les Exercices 3, 4, 5 et le Problème vous n'avez qu'a suivre le même dévelopement.